ResearchGate

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: https://www.researchgate.net/publication/318701877

Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave.

Article · January 2014

CITATIONS
21

READS
21,705

1 author:

Alsina Angel
Universitat de Girona
296 PUBLICATIONS **2,843** CITATIONS

SEE PROFILE

All content following this page was uploaded by Alsina Angel on 26 July 2017.

The user has requested enhancement of the downloaded file.

NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 86, julio de 2014, páginas 5-28

Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave

Angel Alsina (Universidad de Girona. España)

Fecha de recepción: 22 de mayo de 2013
Fecha de aceptación: 20 de diciembre de 2013

Resumen

En este artículo se argumenta que el desarrollo de la competencia matemática se inicia en la Educación Infantil, y que para favorecer su adquisición progresiva es necesario incorporar el trabajo sistemático de los procesos matemáticos. Para conseguir este propósito se exponen 50 ideas clave, diez para cada uno de los cinco estándares de procesos matemáticos que propone el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos: resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación. El artículo concluye con una experiencia de aula en un contexto de aprendizaje de vida cotidiana, en la que se documenta e interpreta el trabajo sistemático de los contenidos y procesos matemáticos con un grupo de niños de 3º de Educación Infantil.

Palabras clave

Contenidos matemáticos, procesos matemáticos, alfabetización matemática, competencia matemática, Educación Infantil

Abstract

This article argues that the development of mathematical competency begins in early childhood education, and that systematic work on mathematical processes must be incorporated to support its progressive acquisition. To achieve this goal, 50 key ideas are presented, ten for each of the five standards of mathematical processes proposed by the National Council of Teachers of Mathematics of the United States: problem solving, reasoning and proof, communication, connections and representation. The article concludes with a classroom experience in a learning context of daily living that documents and analyses systematic work with mathematical processes and contents by a group of third-year early childhood education students.

Keywords

Mathematical contents, mathematical processes, mathematical literacy, mathematical competence, early childhood education

1. Introducción

A raíz de la publicación de la última versión de los estándares para la educación matemática del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM, 2000), los currículos de matemáticas de la mayoría de países han ido incorporando paulatinamente los procesos matemáticos que, junto con los contenidos matemáticos, constituyen el conjunto de conocimientos matemáticos que favorecen la competencia matemática.

Diversos autores de reconocido prestigio han subrayado la importancia de esta innovación curricular. Así, por ejemplo, de Guzmán (2001, p. 9) ya puso de manifiesto que:

> "En la situación de transformación vertiginosa de la civilización en la cual nos encontramos, está claro que los procesos verdaderamente eficaces de pensamiento, que no se vuelven obsoletos con tanta rapidez, es lo más valioso que podemos enseñar a nuestros jóvenes. En nuestro mundo científico e intelectual tan rápidamente mutante vale mucho más proveerse de procesos de pensamiento útiles que de contenidos que rápidamente se convierten en ideas inertes..."

Para este autor la matemática es, sobre todo, saber hacer, es una ciencia en la que el método predomina claramente sobre el contenido. Por este motivo considera que los procesos son el centro de la educación matemática. En una línea similar, Niss (2002) señala la necesidad de substituir los currículos de matemáticas orientados a la adquisición de contenidos, ya que se centran exclusivamente en la adquisición de símbolos y de técnicas, por currículos orientados al uso significativo de estos contenidos en una variedad de situaciones en las que las matemáticas pueden desempeñar un papel. También de Castro, Molina, Gutiérrez, Martínez y Escorial (2012) ponen de relieve el papel de los procesos matemáticos en la adquisición de la competencia matemática, y realizan una comparación en la que ponen de manifiesto, entre otros aspectos, las coincidencias existentes entre los procesos de pensamiento matemático propuestos por el NCTM (2000) y las competencias matemáticas definidas en el Informe PISA 2003 (OCDE, 2004). En la Tabla 1 se reproduce esta comparación, que se completa con la definición de las ocho competencias matemáticas establecidas por Niss (2002) por su repercusión en el campo de la educación matemática.

Estándares de procesos matemáticos (NCTM, 2000)	**Competencias matemáticas Niss (2002)**	**Competencias matemáticas en PISA 2003 (OCDE, 2004)**
Resolución de problemas	Planteamiento y resolución de problemas matemáticos	Planteamiento y resolución de problemas
	Uso de recursos y herramientas	
Razonamiento y prueba	Dominio de modos de pensamiento matemático	Pensamiento y razonamiento
	Razonamiento matemático	Argumentación
Comunicación	Comunicación en, con y acerca de las matemáticas	Comunicación
Conexiones	-	-
Representación	Representación de entidades matemáticas	Representación y uso de operaciones y lenguaje técnico, simbólico y formal
	Análisis y construcción de modelos	Construcción de modelos
	Manejo de símbolos matemáticos y formalismos	

Tabla 1. Comparación entre los estándares de procesos del NCTM (2000) y las competencias matemáticas (Niss, 2002; OCDE, 2004).

Los procesos matemáticos y las competencias matemáticas que se exponen en la Tabla anterior enfatizan una misma idea: la capacidad de usar de forma comprensiva y eficaz las matemáticas que se aprenden en la escuela en una variedad de contextos, además del escolar. Desde este prisma, Alsina (2012a) pone de manifiesto la necesidad de trabajar de forma sistemática los procesos de pensamiento matemático en la Educación Infantil para favorecer el uso de los contenidos e incentivar de este modo

el desarrollo de la competencia matemática, que en este trabajo se concibe como una capacidad del individuo para identificar y entender la función que juegan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de estos individuos como ciudadanos constructivos, interesados y reflexivos (OCDE, 2004).

En la actualidad existe un acuerdo generalizado sobre la necesidad de incorporar esta visión competencial en los currículos de matemáticas que, como se ha indicado, se ha materializado ya en muchos países. En España esta transformación curricular se empieza a vislumbrar en la Ley Orgánica de Educación (BOE, 2006). Y en el caso concreto de la Educación Infantil en la Orden ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil (BOE, 2007). En esta Orden Ministerial se aprecia ya la presencia de diversos procesos de pensamiento matemático que indican las formas de trabajar los diferentes contenidos, y cuyo análisis se puede consultar en Alsina (2012a).

Sin embargo, esta novedad a menudo no ha venido acompañada de directrices que faciliten su incorporación en las prácticas matemáticas que se llevan a cabo en las aulas, por lo que en este artículo se ofrecen algunas orientaciones para que el profesorado de esta etapa educativa pueda integrar el trabajo sistemático de los procesos matemáticos en sus prácticas docentes, y poder avanzar así en el logro de una sociedad que tenga la capacidad de pensar y razonar matemáticamente, y una base útil de conocimientos y destrezas matemáticas. Estas orientaciones se concretan en 50 ideas clave, 10 para cada uno de los cinco estándares de procesos matemáticos que propone el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos: resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación (NCTM, 2000). En términos generales se trata, asumiendo la acepción de "idea" del Diccionario de la Lengua Española de la Real Academia Española, de conceptos, opiniones o juicios formados a partir de la revisión de la literatura especializada sobre estos diversos procesos de pensamiento matemático, y por este motivo en la presentación de cada proceso se ofrece en primer lugar una breve síntesis de dichas aportaciones. Del conjunto de ideas posibles para cada proceso, se han seleccionado a modo de decálogo las que, a criterio del autor, pueden favorecer la adquisición de conocimiento matemático y didáctico de manera más accesible y comprensible para el profesorado de Educación Infantil, en el sentido señalado por Alsina y Planas (2008). Así, pues, las 10 ideas relativas a cada proceso se clasifican en dos grandes grupos: las ideas relativas al conocimiento matemático que utiliza el profesorado en el aula y las ideas relativas al conocimiento didáctico que utiliza el profesorado para favorecer el aprendizaje matemático de los niños. A grandes rasgos, y sin pretender profundizar en ello ya que escapa de las finalidades de este artículo, esta clasificación se inspira en el modelo MKT (*Mathematical knowledge for Teaching)* de Hill, Ball y Schilling (2008) y en el modelo teórico sobre el conocimiento didáctico-matemático del profesor propuesto por Godino (2009). El artículo concluye con una experiencia de aula implementada en la Escuela Balandrau de Girona, en la que se muestra el trabajo sistemático de los contenidos y los procesos matemáticos con un grupo de niños de 3º de Educación Infantil.

2. La resolución de problemas: 10 ideas clave

El planteamiento y la resolución de problemas permite preguntar y responder preguntas dentro de las matemáticas, y con las matemáticas (Niss, 2002). Si bien existe un consenso generalizado en este sentido, no parece existir el mismo grado de acuerdo respecto al significado o el uso de los problemas en el aula.

Respecto al significado, varios autores han hecho hincapié en la distinción entre ejercicio de aplicación y situación problemática (Puig, 1996; Vila y Callejo, 2004; Alsina, 2006; entre otros). Estos autores han puesto de manifiesto que a pesar de la confusión generalizada entre los dos tipos de

actividad, hay múltiples diferencias. Puig (1996), por ejemplo, expone que los ejercicios de aplicación son cuestiones cerradas que requieren la aplicación de técnicas de repetición y responden a aprendizajes mecánicos. A diferencia de los ejercicios de aplicación, una situación problemática implica pensar. Este autor argumenta que las dificultades de la mayoría de niños ante la resolución de problemas hacen pensar que sólo la práctica de ejercicios no es suficiente para la transferencia de conocimiento matemático a nuevos contextos y que, por lo tanto, tiene que procurarse que los ejercicios de aplicación no tengan un peso demasiado excesivo en el trabajo del aula. Desde la perspectiva de la enseñanza, pues, las dificultades se centran en la busca de equilibrios entre la práctica de ejercicios y la de problemas.

Por otro lado, no existe consenso sobre qué conocimientos tendría que incluir una propuesta curricular que enfatice la resolución de problemas ni sobre que significa "tratar la resolución de problemas como un conocimiento a enseñar". Compartimos con Planas (2010) que, para superar esta situación, tienen que considerarse tres ejes: enseñar para la resolución de problemas, enseñar sobre la resolución de problemas y enseñar a través de la resolución de problemas.

Considerando el conjunto de aportaciones expuestas, en la Tabla 2 se presentan las 10 ideas clave seleccionadas entorno a este proceso de pensamiento matemático en el aula de Educación Infantil:

1.	Hay cuatro aspectos referentes a la resolución de problemas que se deberían trabajar desde la Educación Infantil (NCTM, 2000): a) construir nuevo conocimiento matemático por medio de la resolución de problemas, planteando retos en una variedad de contextos (como por ejemplo pensar una estrategia adecuada para comparar si hay más cantidad de árboles o de niños en el patio del colegio); b) resolver problemas que surgen de las matemáticas y en otros contextos, desde las situaciones de vida cotidiana y las rutinas diarias a las situaciones de experimentación con materiales o las que surgen de los cuentos y las canciones; c) aplicar y adaptar una variedad de estrategias apropiadas para resolver problemas, como por ejemplo plantear buenas preguntas; fomentar la interacción, la negociación y el diálogo en el aula; etc.; y d) controlar y reflexionar sobre el proceso de resolver problemas matemáticos.
2.	Una situación problemática es una situación nueva de la que no se conoce de antemano el método de resolución. Esta novedad implica que los niños tengan que pensar para encontrar estrategias o técnicas que les ayuden a encontrar la solución (implican pensar). Deben distinguirse de los ejercicios de aplicación, en los que se conoce de antemano el método de resolución y sirven principalmente para poner en práctica un conocimiento previamente aprendido (implican mecanizar).
3.	La resolución de problemas se puede entender como el marco de aplicación de los diferentes bloques de contenido matemático a partir de situaciones reales o simuladas, extraídas del entorno más inmediato y cercano de los niños. Desde esta perspectiva es indispensable romper el estereotipo que los problemas son sólo de cálculo, es decir, que se pueden resolver con una operación aritmética (una suma, una resta, etc.). Además de considerar los problemas según el tipo de contenido, también se pueden interpretar en base a otros criterios, como por ejemplo según el tipo de enunciado (visual o verbal), según la finalidad (aprender una estrategia, aplicar una técnica, etc.), o bien según el tipo de respuesta (abierta, cerrada).
4.	Los problemas no se resuelven escuchando al maestro ni repitiendo. Se aprende a resolver problemas haciendo, manipulando, simulando, discutiendo, compartiendo, imaginando, observando, visualizando, etc.
5.	En el proceso de resolución se tendría que permitir que cada niño utilice la estrategia que se ajuste mejor a sus posibilidades: un dibujo, un esquema, el cálculo mental, la manipulación de un determinado material, etc.

6.	Deben plantearse a los niños diferentes tipos de situaciones problemáticas (de la vida cotidiana, manipulativas, a partir de cuentos y canciones, con diferentes tipos de contenidos, etc.), priorizando siempre el apoyo visual y gráfico o bien la transmisión oral. Los problemas presentados por escrito, por ejemplo a través de fichas o cuadernos de actividades, no son recomendables todavía en las primeras edades ya que pueden dar lugar a qué los niños no comprendan la utilidad y el sentido de los aprendizajes.
7.	Una posible secuencia de tipo de problemas a trabajar en las primeras edades es la siguiente (Alsina, 2006): situaciones reales; situaciones dramatizadas; situaciones manipulativas; una parte del enunciado con material y la otra parte verbal; situaciones gráficas, con imágenes e ilustraciones; enunciado oral-respuesta oral; enunciado oral-respuesta gráfica; enunciado gráfico-respuesta gráfica; introducción al enunciado escrito y la respuesta oral o gráfica; introducción al enunciado escrito y la respuesta escrita. Se trata, en definitiva, de partir de lo concreto (situaciones reales) para avanzar progresivamente a lo simbólico (lenguaje escrito).
8.	La resolución de problemas favorece la construcción de conocimiento matemático, sobre todo si se consideran las perspectivas "enseñar para la resolución de problemas" ofreciendo estrategias diversas para resolver situaciones también diversas, como por ejemplo relacionar una situación problemática con una experiencia vivida; desmenuzar la situación en partes más "pequeñas" y comprensibles; etc.; "enseñar sobre la resolución de problemas" como por ejemplo incidir en las distintas fases de resolución propuestas por Polya (1945): comprender el problema; concebir un plan; ejecución del plan; examinar la solución obtenida; y "enseñar a través de la resolución de problemas", es decir, plantear retos que permitan adquirir nuevos conocimientos matemáticos.
9.	La resolución de problemas, como el resto de procesos matemáticos, es una herramienta que ofrecen las matemáticas para introducir a los niños en las formas de pensar propias de las matemáticas, como por ejemplo razonar, argumentar, descubrir, representar, modelizar, demostrar, etc., a la vez que permite aplicar los contenidos aprendidos en la escuela en otros contextos, mejorando en definitiva la comprensión del entorno (NCTM, 2000).
10.	Durante el proceso de resolución de situaciones problemáticas, y también durante la comunicación de los resultados obtenidos, se favorece que los niños tomen conciencia de sus capacidades y, a la vez, se muestra su proceso de pensamiento.

Tabla 2. 10 ideas clave sobre la resolución de problemas

3. Razonamiento y prueba: 10 ideas clave

Actualmente se considera que el trabajo sistemático del razonamiento y la prueba es fundamental en todas las edades para que los niños aprendan desde pequeños a razonar (argumentar, explicar, justificar) y probar (en las primeras edades comprobar, más que validar o demostrar) sus acciones y proposiciones, puesto que es el camino necesario para comprender el verdadero significado de las matemáticas. A pesar de la importancia del razonamiento y la prueba en el aula de matemáticas, tradicionalmente este proceso ha tenido una presencia explícita muy escasa e incluso nula en los currículos de Educación Infantil.

Aún así, progresivamente ha habido un interés creciente desde el ámbito de la investigación en educación matemática para analizar las problemáticas asociadas a la enseñanza y el aprendizaje del razonamiento y la prueba, principalmente en relación al bajo rendimiento de los niños en la comprensión y elaboración de este proceso de pensamiento matemático. Schoenfeld (1994), por ejemplo, pone de manifiesto que el razonamiento es un componente esencial del hacer, comunicar y registrar las matemáticas que tiene que ser incorporado en los currículos de todos los niveles.

En Alsina (2011a) se indica que en las primeras edades el razonamiento es informal y de carácter muy intuitivo, ya que los niños y niñas empiezan a razonar a partir de lo que ellos conocen, pero progresivamente debería ensancharse el repertorio de tipos de razonamiento propios de las matemáticas, como por ejemplo:

- El razonamiento algebraico, que implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesarios para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico (Godino y Font, 2003).
- El razonamiento geométrico, que se refiere a tareas que requieren "ver" o "imaginar" mentalmente los objetos geométricos espaciales, así como relacionar los objetos y realizar determinadas operaciones o transformaciones geométricas (Fernández, Cajaraville y Godino, 2008).
- El razonamiento estadístico, que incide en el ciclo de aprendizaje planificación-conjetura-comprobación. Desde esta perspectiva, Batanero (2001) expone que el análisis estadístico de datos no es un proceso mecánico, sino una manera de pensar que puede ayudar a resolver problemas en las ciencias y en la vida cotidiana.
- El razonamiento probabilístico, que se refiere a las ideas de azar y probabilidad, el razonamiento combinatorio, la intuición, la frecuencia relativa, etc. (Piaget e Inhelder, 1951).

Respecto a la demostración, Recio (1999) expone que en la clase de matemáticas presenta una gran diversidad de formas, aunque se subraya de nuevo que en las primeras edades predomina una matemática informal y a medida que se avanza en la escolaridad las formas típicas son la demostración empírico-inductiva y la deductiva-informal.

Desde este marco, en la Tabla 3 se exponen 10 ideas clave para la incorporación del razonamiento y la prueba en el currículo de matemáticas de Educación Infantil y, por extensión, en las prácticas de aula. Se trata de una selección de ideas, como se ha indicado, que se refieren al conocimiento matemático y didáctico del profesorado:

1. Hay cuatro aspectos referentes al razonamiento y la prueba que se deberían trabajar desde la Educación Infantil (NCTM, 2000): a) reconocer el razonamiento y la prueba como aspectos fundamentales de las matemáticas, ya que se trata de elementos básicos para la comprensión y uso eficaz de las matemáticas en diversos contextos, además del escolar; b) formular e investigar conjeturas matemáticas, por ejemplo formulando a los niños buenas preguntas que les animen a construir nuevo conocimiento sobre lo que ya saben; c) desarrollar y evaluar argumentos y pruebas matemáticas, preguntándoles por ejemplo cómo saben que algo es verdad para que desarrollen progresivamente destrezas que les permitan verificar o refutar sus propias aserciones; y d) escoger y usar varios tipos de razonamiento y métodos de prueba, por ejemplo creando, analizando y describiendo patrones numéricos y geométricos o bien clasificaciones a partir de diferentes criterios.
2. En nuestro contexto educativo el razonamiento y la prueba han estado tradicionalmente poco presentes en los currículos de matemáticas de Educación Infantil, y hasta hace relativamente poco tiempo se habían priorizado otros aspectos mucho más mecánicos, como por ejemplo el reconocimiento de figuras geométricas estereotipadas, la copia sin sentido de las notaciones convencionales de los números o bien el aprendizaje de los algoritmos para sumar y restar.
3. En las primeras edades el razonamiento es sobre todo informal y se refiere principalmente a la capacidad de explicar, argumentar o justificar las acciones realizadas y las proposiciones, mientras que la prueba implica comprobar el resultado de dichas acciones y proposiciones, más que demostrarlas o validarlas (la demostración, tal como se entiende en matemáticas,

	corresponde a etapas posteriores). Desde este prisma, razonar y comprobar en Educación Infantil implica argumentar las afirmaciones que se hacen (con preguntas, como por ejemplo "¿por qué piensas que es verdad?"); descubrir (con preguntas, como por ejemplo "¿qué piensas que pasará ahora?"); justificar proposiciones (con preguntas, como por ejemplo "¿por qué funciona esto?"); y hacer razonamientos inductivos, basados en la propia experiencia (Alsina, 2011a).
4.	A medida que los niños avanzan en la escolaridad deberían interiorizar progresivamente otros tipos de razonamiento propios de las matemáticas: el razonamiento algebraico, por ejemplo al argumentar que el patrón de dos series de cubos "azul-verde" y "rojo-amarillo" es el mismo, y representarlo (por ejemplo, con las letras AB); el razonamiento geométrico, que en el caso concreto de Educación Infantil se puede iniciar describiendo y comparando propiedades geométricas elementales de formas geométricas que no están físicamente presentes; o los razonamientos estadístico y probabilístico, que en las primeras edades se puede fomentar a través de tareas que impliquen la recogida y organización de datos, la comparación, etc. (Alsina, 2013).
5.	Las buenas prácticas realizadas a partir de proyectos pueden favorecer el razonamiento y la demostración, junto a otras prácticas necesarias en las aulas de Educación Infantil como las situaciones de experimentación y juego, en contraposición a otras prácticas docentes más descontextualizadas, poco significativas y a menudo orientadas a la adquisición de técnicas y símbolos a través de la repetición y la práctica.
6.	Una gestión de las prácticas matemáticas que favorezca el razonamiento y la prueba en las primeras edades implica plantear buenas preguntas, más que dar explicaciones; favorecer la interacción y el contraste; e incentivar la indagación y el aprendizaje autónomo con la guía del adulto, no con la imposición del adulto. Así, por ejemplo, cuando un niño hace un descubrimiento, más que decirle si es correcto o no, se debería fomentar que lo averigüe por él mismo.
7.	Cuando un niño argumenta críticamente el proceso de resolución y la solución de una situación, usando su propio lenguaje o bien otros recursos, estructura su pensamiento a la vez que muestra y va desarrollando su capacidad de razonar.
8.	La estructuración progresiva del pensamiento y el desarrollo de la capacidad de razonar permite empezar a hacer generalizaciones de un modo natural, por ejemplo cuando un niño analiza diversas figuras planas que tienen los lados rectos podría llegar a generalizar que "todas las figuras planas tienen los lados rectos". Dado que los niños de las primeras edades generalizan a partir de ejemplos (Carpenter y Levi, 1999), es recomendable guiarles en el empleo de ejemplos y contraejemplos (en el caso anterior, dándoles diversas figuras planas que no tengan todos los lados rectos) para que puedan comprobar si sus generalizaciones son adecuadas.
9.	Razonar y comprobar en Educación Infantil favorece que los niños adquieran conciencia de sus propias aptitudes por la actividad matemática, a la vez que adquieren seguridad y confianza en ellos mismos.
10.	Aprender a razonar y comprobar es una necesidad básica de los niños que los ayuda a entender las matemáticas, y les permite pasar de sus creencias personales a las concepciones aceptadas como válidas en el contexto de las matemáticas (NCTM, 2000).

Tabla 3. 10 ideas clave sobre el razonamiento y la prueba

4. La comunicación: 10 ideas clave

Nadie niega que las matemáticas son, entre otras cosas, un lenguaje universal que permite comunicarse. Aun así, debido a que se expresan a menudo a través de símbolos, la comunicación oral y escrita no se reconoce todavía suficientemente como una parte esencial de la educación matemática (NCTM, 2000). En este sentido, cuando se piensa en las matemáticas como un lenguaje se tiende a asociarlas sólo a objetos semióticos transmitidos culturalmente como por ejemplo el "8", que es un símbolo de origen indú transmitido a Occidente por los matemáticos musulmanes durante la Edad Media (por esta razón se denomina una cifra indo-arábiga). Efectivamente, se trata de una notación simbólica que las personas alfabetizadas usamos para comunicar una idea matemática compartida, pero el lenguaje simbólico no es la única herramienta de comunicación de la que disponemos.

El lenguaje oral y el escrito son herramientas imprescindibles, y previas al lenguaje simbólico, para desarrollar y comunicar el pensamiento matemático: cuando un niño verbaliza en voz alta sus ideas matemáticas se favorece la comprensión y la estructuración del pensamiento, ya que para comunicar deben organizarse las ideas. Desde la perspectiva del maestro, el hecho de verbalizar es una ventana abierta que permite "mirar" qué hay dentro de la mente de los niños. Y, con respecto al resto de compañeros del aula, escuchar las explicaciones de los otros les da la oportunidad también de desarrollar su comprensión. Así, pues, los niños que tienen oportunidades y se sienten motivados y apoyados para hablar, escribir, leer y escuchar en las clases de matemáticas se benefician doblemente: comunican para aprender matemáticas, y aprenden a comunicar matemáticamente. Por esta razón es tan importante fomentar la comunicación en el aula de matemáticas.

En la Tabla siguiente se presentan 10 ideas clave que procuran reflejar algunos de los conocimientos didáctico-matemáticos imprescindibles para favorecer este proceso de pensamiento matemático en las aulas de Educación Infantil:

1.	Hay cuatro aspectos referentes a la comunicación que se deberían trabajar desde la Educación Infantil (NCTM, 2000): a) organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación, por ejemplo cuando los niños exponen sus estrategias para resolver una situación, cuando justifican su razonamiento o bien cuando hacen preguntas sobre algo que no saben o les resulta extraño; b) comunicar su pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, maestros y otras personas, por ejemplo dando oportunidades a los niños para que puedan poner a prueba sus ideas y propiciando un ambiente en el aula en el que se sientan libres para expresarlas; c) analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático de los otros, por ejemplo poniendo en común las estrategias usadas para resolver un problema; y c) usar el lenguaje matemático para expresar ideas matemáticas con precisión, por ejemplo haciendo ver a los niños que algunas palabras que se usan en el lenguaje ordinario, tales como "ordenar" o "redonda", tienen un significado más preciso o diferente en matemáticas (en el lenguaje coloquial, "ordenar" se usa por ejemplo para colocar las cosas en su sitio: "tienes que ordenar la habitación", mientras que en el aula de matemáticas cuando se recogen los objetos a menudo se hace una clasificación: "vamos a guardar las pelotas en una caja y las muñecas en otra"; de la misma forma, la palabra genérica "redonda" se puede precisar mucho en la clase de matemáticas según el significado específico: circunferencia, círculo o esfera).
2.	Las matemáticas son, entre otras cosas, un lenguaje universal que permite comunicarse. Aun así, cuando se piensa en las matemáticas como un lenguaje se tiende a asociarlas al lenguaje simbólico, como por ejemplo los números escritos, pero no es la única herramienta para comunicar las ideas matemáticas.
3.	El lenguaje oral y escrito son herramientas imprescindibles (y previas al lenguaje simbólico) para desarrollar y comunicar el pensamiento matemático en las primeras edades, ya que favorecen la

	comprensión del conocimiento y la estructuración del pensamiento (NCTM, 2000). Así, por ejemplo, cuando se pide a un niño que exprese oralmente una idea primero debe haberla interiorizado y organizado en su mente.
4.	La comunicación se tiene que distinguir de la información: informar implica transmitir en sentido unidireccional desde un emisor hacia un receptor; en cambio comunicar implica interactuar en sentido bidireccional dos o más personas (Alsina, 2011a). Por ejemplo, en una clase expositiva en la que la maestra muestra a los niños un cuadrilátero y describe algunas de sus propiedades geométricas elementales se produce una situación de información, mientras que en una clase en la que la maestra muestra un cuadrilátero y pregunta a los niños qué características tiene, fomentando la participación y el diálogo se produce una situación de comunicación.
5.	Los niños empiezan muy pronto a comunicar matemáticamente, por ejemplo cuando expresan que: "faltan dos niños", "hay muchos papeles", o "mi pelota es diferente". A estas edades, el desarrollo de su vocabulario matemático depende en buena medida de la interacción verbal con las familias, pero el papel de la escuela es también fundamental si se tiene en cuenta que el lenguaje es tan importante para aprender matemáticas como lo es para aprender a leer.
6.	El trabajo sistemático de la comunicación en el aula de matemáticas de cualquier nivel educativo, incluida la etapa de Educación Infantil, requiere integrar los procesos de interacción, diálogo y negociación alrededor de los contenidos matemáticos y su gestión, puesto que los niños a menudo interpretan las normas establecidas de maneras diferentes, y muy a menudo también estas interpretaciones difieren de las que los maestros esperan. Planas (2005) se refiere, sobre todo, al conjunto de significados legitimados que delimitan la cultura del aula, como por ejemplo qué se acepta como situación problemática, a qué criterios se da prioridad en el proceso de resolución de un problema, qué papel se otorga a la maestra; etc.
7.	En los procesos de interacción, diálogo y negociación en el aula de matemáticas, las preguntas se erigen como uno de los instrumentos de mediación más idóneos, justamente porque pueden hacer avanzar desde unos primeros niveles de concienciación sobre lo que uno ya sabe o es capaz de hacer hacia niveles más superiores en los cuales va entreviendo la manera como puede avanzar mejor en el aprendizaje (Mercer, 2001).
8.	A nivel curricular se insiste en la necesidad de plantear buenas preguntas para favorecer la comunicación en el aula, sin embargo en términos generales ha habido escasas aportaciones sobre qué características debería tener una buena pregunta, qué tipos de preguntas se tendrían que formular y cómo se tendrían que formular para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático en las primeras edades.
9.	Las buenas preguntas para enseñar matemáticas, de acuerdo con Sullivan y Lilburn (2002), tienen tres características: a) más que recordar un hecho o reproducir una acción, requieren comprensión de la tarea, aplicación de técnicas y estrategias y análisis y síntesis de los conceptos implicados; b) permiten que los niños aprendan respondiendo preguntas, y que los maestros aprendan a partir de las respuestas de los niños; y c) permiten diversas respuestas aceptables. Por ejemplo, es muy distinto plantear a los niños la situación: "Tienes cuatro vasos de cristal y se rompe uno. ¿Cuántos vasos te quedan?" que "Tienes cuatro vasos de cristal y se rompe uno. ¿Qué pasa después?" (Alsina, 2011a)
10.	Los niños que tienen oportunidades, están motivados y se sienten apoyados para hablar, escribir, leer y escuchar en las clases de matemáticas se benefician doblemente: comunican para aprender matemáticas, y aprenden a comunicar matemáticamente (NCTM, 2000).

Tabla 4. 10 ideas clave sobre la comunicación

5. Las conexiones: 10 ideas clave

Las conexiones matemáticas se refieren a: las relaciones entre los diferentes bloques de contenido matemático y entre los contenidos y los procesos matemáticos (intradisciplinariedad); las relaciones de las matemáticas con otras áreas de conocimiento (interdisciplinariedad); y las relaciones de las matemáticas con el entorno que nos rodea (enfoque globalizado).

En el caso concreto de la Educación Infantil, hace ya muchos años que en los currículos -tanto a nivel internacional como nacional- se insiste en plantear el trabajo de los niños de las primeras edades a partir de un enfoque globalizado. Así, por ejemplo, en la Orden ECI/3960/2007, de 19 de Diciembre, por el que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil se expone que:

> "Los contenidos de una área adquieren sentido desde la complementariedad con el resto de las áreas, y tendrán que interpretarse en las propuestas didácticas desde la globalidad de la acción y de los aprendizajes. Así, por ejemplo, el entorno no puede ser comprendido sin la utilización de los diferentes lenguajes y del mismo modo, la realización de desplazamientos orientados tiene que hacerse desde el conocimiento del propio cuerpo y de su ubicación espacial" (BOE, 2007, p. 1023).

Aprender matemáticas desde esta triple visión: intradisciplinar, interdisciplinar y de manera globalizada, pues, es uno de los principios del aprendizaje de las matemáticas en la etapa de Educación Infantil y, por supuesto, en el resto de etapas educativas. Pero, como indica Alsina (2011b, 2012b), se trata de un enfoque muchas veces repetido pero todavía poco implementado. Considerando esta realidad, en la Tabla 4 se ofrecen algunos andamios para ayudar al profesorado de la etapa de Educación Infantil a incorporar las conexiones matemáticas en las prácticas escolares.

1. Hay tres aspectos referentes a las conexiones que se deberían trabajar desde la Educación Infantil (NCTM, 2000): a) reconocer y usar las conexiones entre ideas matemáticas, como por ejemplo reconociendo que se necesitan las cantidades para expresar la medida de una magnitud o analizando patrones en los cuentos y en las canciones que cantan; b) comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen una sobre otras para producir un todo coherente, por ejemplo al reconocer la misma estructura matemática en contextos aparentemente diferentes como clasificar piezas según su color, o monedas según su valor; c) reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos, como por ejemplo temas propios de otras disciplinas o contextos de vida cotidiana.
2. Las conexiones matemáticas, de acuerdo con Alsina (2011b, 2012b), se refieren a las relaciones entre los diferentes bloques de contenido matemático y entre los contenidos y los procesos matemáticos (intradisciplinariedad), como por ejemplo cuando se analiza el número de lados de una figura geométrica o bien cuando esta figura se representa en un papel; las relaciones entre las matemáticas con otras áreas de conocimiento (interdisciplinariedad), como por ejemplo cuando se identifica el patrón de un ritmo musical; y las relaciones entre las matemáticas con el entorno que nos rodea (enfoque globalizado).
3. Las conexiones entre los diferentes bloques de contenido matemático ponen de manifiesto que las matemáticas de las primeras edades no son una colección fragmentada de bloques de contenido, aunque con frecuencia se dividen y presentan así, sino que constituyen un campo integrado de conocimiento. Desde esta perspectiva, hay unas mismas estructuras matemáticas que se repiten: identificar (definir o reconocer); relacionar (comparar); y operar (transformar), lo único que varía es el tipo de contenido: calidades sensoriales, cantidades, posiciones y formas, atributos medibles, y datos y hechos (Alsina, 2006). Dentro todavía de las conexiones intradisciplinares,

los estrechos vínculos entre los contenidos y los procesos matemáticos evidencian que no son conocimientos independientes de una misma disciplina sino que se interrelacionan, se retroalimentan para favorecer la competencia matemática. Al combinarse los contenidos y los procesos generan nuevas miradas que hacen hincapié no solamente en el contenido y el proceso sino y especialmente en las relaciones que se establecen entre ellos, por ejemplo al interpretar la resolución de problemas como el marco de aplicación de los diferentes contenidos, no únicamente los referidos al cálculo (Alsina, 2012b).

4. Las conexiones entre las matemáticas y las otras áreas de conocimiento ponen de manifiesto que, a pesar de que actualmente la práctica educativa más habitual sigue siendo todavía el trabajo aislado de los contenidos matemáticos, las actividades interdisciplinares van ocupando un lugar cada vez más importante en las aulas de Educación Infantil. Así, en las primeras edades las matemáticas pueden trabajarse en conexión con la literatura infantil, por ejemplo trabajando las matemáticas a partir de cuentos (Saá, 2002); con el arte, por ejemplo, trabajando las matemáticas a partir de pinturas y esculturas (Edo, 2008); con la música, trabajando a partir de canciones (Saá, 2002) o con la psicomotricidad, trabajando aspectos diversos relativos a la orientación y la estructuración espacial (Benavides y Núñez, 2007).

5. Las conexiones entre las matemáticas y el entorno evidencian que el uso de contextos de vida cotidiana en la primeras edades puede contribuir a facilitar el aprendizaje de las matemáticas, pero sobre todo a comprender cuál es el sentido de las matemáticas, cuáles son sus verdaderas funciones: formativa, teniendo en cuenta que los contextos de vida cotidiana permiten pasar progresivamente de situaciones concretas o situaciones abstractas (matematización progresiva); instrumental, al considerar que los contextos son, en realidad, herramientas que favorecen la motivación, el interés o el significado de las matemáticas; y aplicada, al fomentar el uso de las matemáticas en contextos no exclusivamente escolares y, por lo tanto, contribuir a la formación de personas matemáticamente más competentes (Alsina, 2011b, 2012b).

6. En el aula de Educación Infantil se favorecen las conexiones matemáticas cuando se reta a los niños a aplicar el aprendizaje matemático en investigaciones y proyectos matemáticos amplios, como por ejemplo en contextos de vida cotidiana (llamados contextos reales o realistas en el marco de la Educación Matemática Realista planteada por Freudenthal, 1973) o en situaciones de manipulación, experimentación y juego, en las que formulan preguntas y diseñan encuestas, toman decisiones sobre métodos de recogida y registro de información, y planifican representaciones para comunicar los datos y para que los sirvan de ayuda para hacer conjeturas e interpretaciones razonables.

7. Para trabajar las matemáticas a partir de propuestas globalizadas en Educación Infantil se plantean las siguientes fases de trabajo (Alsina, 2011b, 2012b): 1) matematización del contexto, para que el maestro pueda identificar los contenidos matemáticos que se pueden trabajar, y planificar a través de qué procesos matemáticos trabajarlos; 2) trabajo previo en el aula, para identificar los conocimientos previos de los niños a través del diálogo, así como para establecer entre todos los recursos necesarios para trabajar en el contexto escogido (cámara digital, materiales diversos como cintas métricas, libreta para representar los descubrimientos, etc.); 3) trabajo en contexto, para que los niños descubran que fuera de las aulas también hay matemáticas; 4) trabajo posterior en el aula a través de puestas en común para identificar los conocimientos aprendidos y favorecer su interiorización.

8. El uso de objetos concretos en situaciones de manipulación y experimentación en el aula favorece también la conexión de las ideas matemáticas nuevas con las anteriores, siempre que haya una buena planificación y gestión ya que el material por sí mismo no es garantía de nada. Por ejemplo, cuando un niño levanta tres dedos y pregunta "¿tengo tres años?" trata de conectar la palabra "tres" con el número que representa su edad, a través de un conjunto concreto de objetos, sus dedos (NCTM, 2000).

9.	Cuando los niños pueden conectar ideas matemáticas, su comprensión mejora. En el caso concreto de Educación Infantil, por ejemplo, es evidente que la comprensión de los números varía mucho si la práctica consiste exclusivamente en reseguir el trazo para aprender la notación convencional que si se propicia la observación de los números escritos que hay en el entorno para comprender para qué se utilizan, la identificación de cantidades en diversos contextos, la comparación de colecciones de objetos en el aula, etc.
10.	Cuando se contemplan las conexiones en el aula de matemáticas se eliminan las barreras que separan las matemáticas aprendidas en la escuela de las aprendidas en otros contextos. Dicho de otra manera, se conectan las matemáticas informales e intuitivas que los niños han aprendido a través de su experiencia con las más formales, por ejemplo poniendo de relieve las muchas situaciones en las que los niños encuentran matemáticas fuera y dentro de la escuela: los números que hay en las calles, en las tiendas, en las matrículas de los coches, … son los mismos números que hay en la escuela; o los cuerpos tridimensionales que puede haber en un parque, como por ejemplo el cilindro y la esfera que componen una farola, tienen las mismas propiedades geométricas que los cuerpos geométricos de madera que puede haber en la escuela.

Tabla 5. 10 ideas clave sobre las conexiones

6. La representación: 10 ideas clave

Las representaciones se refieren a las formas de representar las ideas y procedimientos matemáticos, como por ejemplo imágenes, materiales concretos, tablas, gráficos, números, letras, entre otras. Muchas de las representaciones que existen actualmente son el resultado de una construcción cultural, que llevó muchos años determinar. Cuando los niños comprenden las representaciones matemáticas que se les presenta y además tienen oportunidades de crear otras, mejoran su capacidad para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos. La representación es, pues, un proceso indispensable para poder aprender. Si no hay representación del conocimiento no hay aprendizaje.

En Educación Infantil las representaciones más habituales para representar las ideas y procedimientos matemáticos son objetos físicos, el lenguaje natural, gestos, dibujos, diagramas y símbolos inventados o convencionales, aunque éstos últimos en menor medida. Así, por ejemplo, agrupar tres caramelos es ya una representación del "tres", en este caso con objetos; representar el "tres" con tres dedos es otro tipo de representación usando objetos físicos, en este caso los dedos; cuando se dice la palabra "tres", es una representación a través del lenguaje oral; dibujar tres caramelos es una representación concreta del valor cardinal "tres", en la que se usan dibujos; cuando se hacen tres cruces (XXX) o tres rayitas (///) es un tipo de representación pictórica; y el símbolo convencional 3 es ya una representación convencional resultado de una construcción cultural, como se decía hace unas líneas. Todas estas representaciones son poderosos procedimientos de comunicación (ambos procesos están muy relacionados) y, a la vez, poderosas herramientas de pensamiento. En definitiva, representar ideas y conectar las representaciones a las matemáticas constituye el núcleo de la comprensión de éstas, por lo que en la Tabla 6 se ofrecen algunas ideas clave para favorecer su desarrollo desde las primeras edades.

1. Hay tres aspectos referentes a la representación que se deberían trabajar desde la Educación Infantil (NCTM, 2000): a) crear y usar representaciones para organizar, registrar, y comunicar ideas matemáticas, por ejemplo cuando en una clase de Educación Infantil se hace una votación a mano alzada para decidir el proyecto que se va a trabajar, se pueden organizar los resultados en la pizarra a través de cruces para hacer el recuento; b) seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas, por ejemplo, los niños de las primeras edades deberían saber representar por escrito una adición a través de una representaciones concretas o pictóricas que mantienen una correspondencia término a término; y c) usar representaciones por modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos, por ejemplo empezando a asociar las cantidades a las regletas, que son un modelo matemático que representa una versión idealizada de las cantidades elementales (del 1 al 9).

2. La representación de las ideas y procedimientos matemáticos es un proceso indispensable para poder aprender. Si no hay representación no hay comprensión, y sin comprensión no puede haber aprendizaje de las matemáticas (Alsina, 2011a). En Educación Infantil, por ejemplo, el primer cálculo es manipulativo, pero progresivamente las operaciones deben representarse mentalmente y también por escrito (con representaciones adecuadas a su edad), ya que si el niño queda estancado en la manipulación no se avanza en la adquisición de conocimiento matemático.

3. La representación de las ideas y procedimientos matemáticos puede tener formas diversas en las primeras edades, por ejemplo a través de objetos físicos (una pieza con forma de triángulo), el lenguaje natural (la palabra "triángulo"), dibujos (triángulos de diferentes características: triángulos rectángulos, triángulos con dos lados iguales y uno diferente, etc.), y símbolos convencionales (un triángulo equilátero), aunque éstos últimos en menor medida ya que en las primeras edades se tiende erróneamente a asociar el concepto con la imagen estereotipada (por ejemplo, el triángulo equilátero con la idea de triángulo).

4. El desarrollo progresivo de la representación de las ideas y procedimientos matemáticos va de lo concreto a lo abstracto (Freudenthal, 1973). En este sentido, se respeta y favorece su proceso de adquisición cuando en Educación Infantil se fomenta por ejemplo que las primeras representaciones sea concretas, a partir de objetos o dibujos y usando el lenguaje natural; posteriormente pictóricas, usando tablas o diagramas; y finalmente convencionales, usando símbolos abstractos. Aunque el desarrollo de la representación vaya de lo concreto a lo abstracto, en términos generales el proceso de enseñanza-aprendizaje no es unidireccional sino bidireccional, es decir, de lo concreto a lo abstracto y de lo abstracto otra vez a lo concreto, aunque la finalidad sea siempre la misma: aprender (y sobre todo comprender) el símbolo que representa un objeto o una situación real.

5. A través de las interacciones con las diferentes representaciones, con la maestra y con el resto de los niños, los niños desarrollan sus propias imágenes mentales sobre las ideas matemáticas (NCTM, 2000). Estas representaciones internas son las que permiten avanzar en el aprendizaje de las matemáticas.

6. La adquisición progresiva de la representación de las ideas y procedimientos matemáticos aumenta la capacidad para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos. En otras palabras, permite hacer modelos e interpretar la realidad. Un modelo es, pues, una representación ideal de un aspecto concreto de la realidad usada con finalidades de interpretación. Por esta razón los modelos simplifican la realidad subrayando los elementos fundamentales y eliminando los aspectos secundarios. Por ejemplo, cuando en Educación Infantil se dibuja el itinerario de un recorrido en el que se sitúan diversos puntos que facilitan la localización, se trata de un modelo simulador de la realidad que, aunque no se ajuste a la realidad física (ya que no es fiel a aspectos básicos como las distancias), permite orientarse (Alsina, 2011a).

7.	El término modelo se usa de maneras diferentes: a) modelos manipulables (materiales físicos con los que trabajan los niños, como por ejemplo una regleta que representa el número cinco); b) modelos ejemplificadores o simuladores (por ejemplo el dibujo de un itinerario que puede hacer un niño, o en términos más complejos, el plano esquemático de la red del metro de una gran ciudad); y c) como sinónimo de representación (NCTM, 2000).
8.	Ya desde las primeras edades es importante distinguir entre dos aspectos relacionados pero distintos: a) el acceso y la comprensión de modelos matemáticos elaborados previamente; b) la elaboración de representaciones y modelos matemáticos (Alsina, 2011a). Un niño de cuatro años que está aprendiendo la noción de número puede acceder a representaciones y modelos matemáticos elaborados previamente como por ejemplo un material manipulativo compuesto por botones con diferentes cantidades de agujeros para agruparlos o clasificarlos; pero progresivamente debe favorecerse la elaboración de sus propias representaciones acerca de las cantidades.
9.	La representación de las ideas y procedimientos matemáticos está estrechamente ligada con la comunicación, cada uno de ellos coopera con el otro y le da apoyo.
10.	A través de las representaciones y los modelos matemáticos se comprenden mejor las ideas matemáticas, puesto que representaciones y modelos diferentes aclaran diferentes aspectos de una idea matemática compleja (NCTM, 2000). Así por ejemplo, para un niño de tres años "3" es una abstracción, y por lo tanto una idea matemática compleja que comprende e interioriza progresivamente a medida que se le presentan representaciones y modelos diferentes: tres caramelos, tres dedos, la carta de tres espadas, la palabra "tres", tres cruces (XXX) o tres rayitas (///), la regleta del 3, etc.

Tabla 6. 10 ideas clave sobre las conexiones

Tomando en consideración las 50 ideas clave descritas que, como se ha indicado, pretenden ser una ayuda para favorecer la incorporación progresiva de los procesos matemáticos en las prácticas docentes desde las primeras edades, dado su importante papel en el desarrollo de la competencia matemática, en la segunda parte de este artículo se describe una experiencia en un contexto de aprendizaje de vida cotidiana en la que se documenta e interpreta el trabajo sistemático de los contenidos y procesos matemáticos con un grupo de niños de 3º de Educación Infantil.

7. Una experiencia de aula: observación, documentación e interpretación de los contenidos y procesos matemáticos

Una educación de alta calidad en las primeras edades requiere profesionales competentes que observen las acciones de los niños, documenten lo observado para llegar a múltiples interpretaciones y realicen una confrontación a través del diálogo. Esta es una de las principales obsesiones de Malaguzzi (2001) que aquí se asume en su totalidad. Rinaldi (2001) indica que una variada y amplia documentación (fotografías, videos, transcripciones, notas, etc.):

- Hace visible los procesos de aprendizaje y las estrategias utilizadas por cada niño, aunque de manera parcial y subjetiva.
- Permite la lectura, el reencuentro y la evaluación. Estas acciones se convierten en parte integral del proceso de construcción del aprendizaje.
- Parece ser esencial para el proceso meta-cognitivo y para el entendimiento de niños y adultos.

> "La observación, la documentación y la interpretación se tejen juntas en lo que yo definiría como un "movimiento espiral", en el que ninguna de estas acciones puede separarse de las otras. Es imposible, de hecho, documentar sin observar e interpretar. Por medio de la documentación, el pensamiento o la interpretación del documentador llega a ser tangible y capaz de ser interpretado. Las notas, grabaciones y fotografías representan fragmentos de la memoria. Mientras cada fragmento está saturado con la subjetividad de quien documenta, al mismo tiempo es sujeto a la interpretación de otros, como parte de un proceso colectivo de construcción del aprendizaje. En estos fragmentos se encuentra el pasado y también el futuro (por ejemplo: "Qué hubiera pasado si..."). El resultado es un conocimiento abundante, co-construido y enriquecido por las contribuciones de muchos" (Rinaldi, 2001, p. 4)

Es desde esta perspectiva desde la que se ha observado, documentado e interpretado la experiencia "Nuestra escuela tiene nombre de montaña", en la que se trabajan de manera integrada los contenidos y los procesos matemáticos. Se trata de una experiencia implementada por la maestra Fátima Dalmau en 3º de Educación Infantil de la Escuela Pública Balandrau de Girona a partir de las fases descritas por Alsina (2011b, 2012b) para trabajar matemáticas en Educación Infantil a partir de propuestas globalizadas: 1) matematización del contexto (se consideran los posibles contenidos matemáticos que pueden trabajarse, y a través de qué procesos matemáticos pueden trabajarse); 2) trabajo previo en el aula: se presenta la propuesta y se establece un diálogo con los niños para identificar sus conocimientos y experiencias previas; 3) trabajo en contexto: los niños usan sus conocimientos y descubren nuevos conocimientos en situaciones de observación, manipulación, experimentación, juego, etc.; 4) trabajo posterior en el aula: se establece un diálogo con los niños para que comuniquen lo que han aprendido, para favorecer de este modo la comprensión e interiorización de los conocimientos matemáticos trabajados.

7.1. Matematización del contexto

En la experiencia se han considerado de forma previa los contenidos matemáticos siguientes, ya que ayudan a no perder de vista las ideas matemáticas que enmarcan la propuesta educativa:

- Contenidos de lógica (cualidades sensoriales): observación e identificación de las cualidades de los materiales usados; agrupación y comparación de los objetos según sus características; etc.
- Contenidos de numeración y cálculo (cantidades): uso comprensivo de los cuantificadores y las cantidades elementales; comparación entre cantidades; operaciones de suma y resta.
- Contenidos de geometría (posición y forma): posición relativa (arriba-abajo, delante-detrás, etc.); dirección (hacia arriba, hacia abajo); y distancia de los objetos entre ellos (más lejos, más cerca, etc.); identificación de las propiedades geométricas elementales de las formas.
- Contenidos de medida (atributos mesurables): reconocimiento y comparación de magnitudes como la longitud (largo-corto; alto-bajo); el tamaño (grande-pequeño); etc.
- Contenidos de estadística y probabilidad: recogida de datos y análisis de hechos posibles e imposibles.

Se planifica que el trabajo de estos contenidos va a realizarse a través de los diferentes procesos de pensamiento matemático:

- Resolución de problemas: planteamiento de buenas preguntas, retos, etc. que impliquen tener que buscar (a menudo de manera cooperativa) diversas estrategias para resolver situaciones que vayan surgiendo.
- Razonamiento y prueba: justificación y argumentación de las acciones que vayan realizando los niños, y comprobación de los resultados obtenidos.

- Comunicación y representación: puesta en común de las ideas y acciones de los niños usando vocabulario matemático adecuado.
- Conexiones: relaciones entre diferentes contenidos y conexiones de las ideas matemáticas con el contexto que les rodea.

7.2. Trabajo previo en el aula

Al tratarse de una escuela de nueva creación, durante el curso 2011-2012 se eligió el nombre de la escuela con gran implicación por parte de toda la comunidad educativa. El nombre elegido fue "Escuela Balandrau", que es el nombre de una montaña próxima.

A partir de aquí se inicia un proyecto de trabajo para profundizar en el conocimiento de la montaña de Balandrau en particular y de los diferentes tipos de montañas y sus características en general. Los conocimientos previos de los niños sobre las montañas (ver Tabla 7) son el punto de partida para iniciar el proyecto:

- *"Yo subí una montaña muy alta con mi padre"*
- *"En las montañas que hay nieve los esquiadores bajan muy rápido y a veces se estrellan abajo"*
- *"También hay montañas de piedra que unos escaladores suben con cuerdas"*
- *"He hecho una montaña muy grande en el arenal pero me la han destrozado"*
- *"Haremos una montaña con las maderas y pondremos las cuerdas para subir y un río que baje y llegue hasta allí en la puerta"*

Tabla 7. Conocimientos previos de los niños sobre las montañas

Partiendo de la observación y la escucha atenta, la maestra va detectando los intereses de los niños y propone construir una montaña. En clase se inicia una conversación preguntando qué materiales se podrían usar para "construir montañas":

- *"Con las maderas"*
- *"También con los cilindros que tenemos"*
- *"Con piedras"*
- *"No porque pesan y se nos caen y nos hacemos daño"*
- *"Y las piedras no se aguantarían porque son un poco redondas"*
- *"Con las almohadas"*
- *"Y con los vasos quizás"*
- *"No, con los vasos sólo podemos hacer una torre"*
- *"O con las cajas y las ruedas del patio"*
- *"Y con los "porexpan. Pero son demasiado grandes, un día queríamos hacer una torre y no llegábamos, con los porexpan sólo podemos hacer caminos (...) pero si Fàtima (la maestra) nos pone las de arriba sí que lo podemos hacer"*

Tabla 8. Puesta en común sobre los posibles materiales a usar para construir una montaña

7.3. Trabajo en contexto

Desde la toma de decisiones y el aprendizaje autónomo los niños prueban diferentes maneras de "construir montañas" usando tanto los materiales que hay habitualmente en la clase como otros que se ponen a su alcance. Se organizan en parejas o grupos de 3 ó 4, eligen el material y deciden el espacio en el que quieren ir, que está en función de las dimensiones del material.

Empieza el trabajo, la acción, el diálogo, la comunicación de ideas, la búsqueda de soluciones compartidas, la toma de decisiones. Los niños se concentran en el material, prueban, ensayan, hacen y deshacen, expresan sus ideas pero también escuchan las de los demás e intentan buscar soluciones conjuntamente, llegando a acuerdos. Y la gestión de la maestra se basa en ayudar a los niños a ser conscientes de lo que están haciendo: recoge sus ideas para avanzar e ir más allá; deja que los niños aprendan a partir de la propia experiencia, pero también poniéndolos en contacto con nuevos retos que conducen a los niños a buscar estrategias, por ejemplo para conseguir un orden o equilibrio; formula buenas preguntas; favorece el planteamiento de hipótesis y pide argumentos que justifiquen sus acciones, el proceso seguido, el resultado; etc.; y ayuda a los niños a expresar sus ideas y descubrimientos usando lenguaje matemático apropiado. Además favorece el trabajo en parejas o en pequeño grupo para promover las primeras formas de cooperación al construir, crear y representar con los materiales a partir de un objetivo común y el esfuerzo para abrirse a las ideas de los demás.

La manipulación de los diferentes materiales pone en contacto a los niños con situaciones de aprendizaje relacionadas con las matemáticas intuitivas, informales, que los niños aprenden a través de sus experiencias (NCTM, 2000). En las Tablas 9, 9bis y 10 se documentan pequeños episodios de clase y, a partir de ellos, se hace una interpretación de los posibles conocimientos matemáticos que se ponen en juego.

Documentación	Interpretación
 - Nil: *"Ponemos las maderas largas tumbadas, sino caen"* - *"Si ponemos el tubo en medio de las maderas se aguantan"*	**Contenidos:** *Geometría:* posición relativa de las maderas. *Medida*: longitud de las maderas. **Procesos:** *Resolución de problemas:* colocación adecuada de las maderas para que no se caigan. *Razonamiento y prueba*: Justificación de la colocación de las maderas y posterior comprobación. *Comunicación:* explicación a los demás.
 Iu y Jana buscan y prueban diferentes medidas y formas de las cajas para conseguir la simetría que los permitirá controlar el equilibrio de su construcción.	**Contenidos:** *Geometría:* formas de las cajas; posición de las cajas. **Procesos:** *Resolución de problemas:* colocación adecuada de las cajas para que no se caigan. *Razonamiento y prueba*: comprobación de la acción realizada.

Ander y Katerin han construido torres con los cilindros. Ander observa la distancia que hay entre las dos torres, quiere poner maderas largas para conectar las dos estructuras.

Contenidos:
Geometría: distancia entre las dos torres.
Medida: longitud de la madera para unir las dos torres.

Procesos:
Resolución de problemas: estrategias para que las torres no se caigan.

Jan está un rato colocando los vasos uno dentro del otro, pero después de probar varias maneras con Naia han encontrado una solución: hacen hileras intercalando los vasos, y calculando bien la distancia entre un vaso y el otro, colocándolos con precisión, consiguen hacer una construcción más larga, más ancha y más alta.

Contenidos:
Geometría: posición relativa de los vasos (unos dentro de otros; unos encima de otros); distancia entre los vasos.
Medida: longitud y anchura de las hileras.

Procesos:
Resolución de problemas: estrategias para hacer una construcción más larga, más ancha y más alta.

- Adrià: *"Mira, si ponemos un vaso hacia abajo, un vaso hacia arriba, un vaso hacia abajo ¡también se aguanta!"*

Con los cubos del patio siguen el mismo procedi-miento que con los vasos.

Contenidos:
Geometría: posición relativa de los vasos y los cubos (unos dentro de otros; unos encima de otros); distancia entre ellos.
Medida: longitud y anchura de las hileras.

Procesos:
Resolución de problemas: estrategias para hacer una construcción más larga, más ancha y más alta.
Razonamiento y demostración: transferencia a otros materiales (cubos); comprobación de la acción.

- Jana: *"Si tapamos con ropas las almohadas haremos una montaña un poco redonda"*

Contenidos:
Geometría: posición de las almohadas; forma de la montaña.

Resolución de problemas:
Resolución de problemas: estrategias para hacer una construcción.

Tabla 9. Documentación e interpretación de los contenidos y procesos matemáticos que usan los niños al construir una montaña.

Van probando con otras estructuras, y experimentan que cuando la base es más pequeña es más fácil que caiga la construcción. A nivel de documentación e interpretación, los contenidos y procesos matemáticos que se usan tienden a ser los mismos que los que se indican en la Tabla 9, aunque varíen los materiales (Tabla 9bis):

Tabla 9bis. Documentación e interpretación de los contenidos y procesos matemáticos que usan los niños al construir una montaña

Un grupo de cinco o seis niños se animan a completar y ampliar su proyecto: quieren construir un río que baje por la montaña. En la clase la maestra invita al equipo promotor de la iniciativa a explicar su proyecto al resto de compañeros. El tema genera bastante entusiasmo, y todos quieren expresar sus ideas, se verbalizan muchas nociones espaciales cómo: *"con un río que baje; que gire hacia allá; que dé la vuelta a la montaña; arriba; lejos de...; cerca de...; que vaya hacia este lado; etc."*

Se propone que dibujen cómo les gustaría que fuera la montaña, donde tendría que ir el río, etc. Cada niño hace su representación y después la explican al resto del grupo: a algunos les es más fácil expresarlo a nivel oral, y en otros empieza a haber un significado en la producción del dibujo. En definitiva, se trata de ayudarles a verbalizar nociones espaciales, formulando preguntas que ayuden a reflexionar, concretar, aclarar o consolidar algunos conceptos.

Posteriormente, en pequeño grupo concretan en el arenal lo que han hablado o dibujado. La maestra observa y facilita la acción y las ideas de los niños pero no se anticipa a ellas, permitiendo así que cada grupo siga su proceso, que es propio y diferente. El resultado es fruto del diálogo entre ellos, de cómo buscan soluciones a las dificultades que se van encontrando y de lo que finalmente construyen en base a diversos ensayos y errores.

Documentación	Interpretación
 - "*Tenemos que poner mucha arena para hacer una montaña muy alta*". - *"La arena que echamos arriba cae hacia abajo"*.	**Contenidos:** *Cantidades* (cuantificadores): cantidad de arena para construir la montaña. *Geometría*: posición y dirección de la arena. *Medida*: altura de la montaña. **Procesos:** *Resolución de problemas*: estrategias para construir una montaña que sea muy alta *Comunicación*: vocabulario matemático para expresar sus ideas.
 - Leire: *"Podemos poner agua que baje por la montaña y vaya a parar al río"*. - Maestra: *"¿Cómo lo podemos hacer?"*. - Jan: *"Cogemos agua con las botellas y la echamos aquí encima de la montaña"*. - Naia: *"Pero el agua se va dentro de la arena, no va al río.* - Maestra: *"¿Podríamos usar el tubo que tenemos en la clase?*	**Contenidos:** *Geometría*: dirección del agua. **Procesos:** *Resolución de problemas*: con la mediación de la maestra, buscan una estrategia para que el agua no vaya dentro de la arena. *Razonamiento y prueba*: argumentan que si vierten agua arriba irá dentro de la arena, no hacia el río. *Comunicación*: usan vocabulario matemático para expresar sus ideas.
 Colocan un embudo en un extremo del tubo por el que entrará el agua, y durante un rato prueban diferentes maneras de colocar el tubo, ya que tienen que orientarlo bien para que al echar el agua por el embudo ésta vaya a parar al río. Deben tener en cuenta la orientación y dirección del tubo, la situación del río, y la altura y la pendiente que dan al tubo para que el agua llegue hasta el río. Encuentran la solución haciendo pasar el tubo por dentro de la montaña de arena de forma que quede fijado, y una vez consiguen hacer bajar el agua, se animan a alargar el recorrido del río (de este modo el agua baja con más fuerza, y avanza siguiendo el recorrido que ellos han marcado haciendo curvas, rectas, girando, llegando cada vez más lejos).	**Contenidos:** *Geometría:* posición y orientación del tubo para que el agua vaya hacia abajo; distancia del recorrido del agua; trayectoria del agua en línea recta y curva; giros en el recorrido del agua. *Medida*: longitud del recorrido del río. **Procesos:** *Resolución de problemas*: prueban diferentes maneras de colocar el tubo para que el agua vaya a parar al río. *Razonamiento y prueba*: explican la posición del tubo y comprueban como llega el agua al río. *Comunicación:* usan vocabulario matemático para expresar sus ideas.

Tabla 10. Documentación e interpretación de los contenidos y procesos matemáticos que usan los niños al construir un río que baja por la montaña

7.4. Trabajo posterior en el aula

Una vez finalizado el trabajo en contexto, y como una parte más de la gestión que lleva a cabo la maestra, se establece un diálogo con los niños para poner en común los conocimientos usados durante la experiencia y favorecer así su comprensión e interiorización. Se trata, como ya señaló Brousseau (1994), de realizar una síntesis e institucionalización de los conocimientos utilizados que permita que los niños sean capaces de reconocerlos como contenidos matemáticos que han construido y aprendido en la escuela. En caso contrario, los niños habrán realizado diversas acciones, pero será difícil que sepan que los conocimientos que han usado tengan relación con las matemáticas.

Alsina (2011b, 2012b) indica que durante esta fase en la que los niños comunican lo que han descubierto y aprendido debe procurarse que usen un lenguaje matemático adecuado. Para fomentar el uso de vocabulario matemático ajustado a su nivel, en la experiencia descrita se utiliza la documentación realizada durante la fase de trabajo en contexto (sobre todo imágenes) como base para que los niños identifiquen los conocimientos matemáticos que se han puesto en juego.

8. Conclusiones

A modo de conclusión, en primer lugar es preciso señalar que en la experiencia de aula descrita se da la conexión más importante en los primeros aprendizajes matemáticos, que es la existente entre las matemáticas intuitivas que los niños aprenden a través de sus experiencias, en el contexto de prácticas informales, y las matemáticas más formales que se aprenden en la escuela (NCTM, 2000). Baroody (1987) y Hugues (1986) introdujeron el término "matemáticas informales" para referirse a las matemáticas intuitivas e informales que los niños de las primeras edades van recopilando a partir de sus intereses y actividades cotidianas y que, como ya se puso de manifiesto en Alsina (2012b), son una base fundamental para ir desarrollando su pensamiento matemático. Diversos autores han analizado las prácticas informales que asocian a la adquisición de conocimientos matemáticos informales: Starkey y Cooper (1980), por ejemplo, indican que los niños aprenden nociones logicomatemáticas guardando objetos, o que adquieren nociones espaciales en juegos de construcción; Anderson (1997) señala la variedad de experiencias numéricas informales en las cuales se implican niños de cuatro años, como por ejemplo en actividades de contar, nombrar, estimar y comparar cantidades, reconocer números escritos, sumar y restar con cantidades pequeñas, etc; y también Ginsburg, Klein y Starkey (1998) exponen algunas situaciones, como por ejemplo cuando los niños señalan la edad con los dedos o ponen velas en un pastel, en las que interactúan con las cantidades. En todos estos trabajos previos, como en los episodios de aula descritos en este artículo, se pone de manifiesto que los niños adquieren conocimientos matemáticos intuitivos en el marco de prácticas informales que son el fundamento para un posterior aprendizaje formal de las matemáticas.

En segundo lugar cabe considerar que en los procesos de interpretación de las acciones de los niños puede producirse un efecto que Brousseau (2007) denominó "efecto Jourdain", y que se da cuando se intelectualizan y sacralizan las respuestas y los comportamientos de los niños para "reconocer" indicios de conocimiento matemático, aunque estas respuestas y comportamientos tengan causas, motivaciones y significados triviales. En otras palabras, puede ocurrir que quien interpreta vea matemáticas por todas partes, mientras que los niños simplemente están jugando y no perciben los elementos matemáticos que observa el adulto por ninguna parte. Esto sería efectivamente así si en las propuestas educativas no hubiera una planificación previa y una gestión adecuada por parte del profesorado, como por ejemplo plantear retos que provoquen la búsqueda de estrategias o la aplicación de técnicas para resolver situaciones problemáticas; formular buenas preguntas que conduzcan a los niños a explicar, argumentar y justificar sus acciones, a usar lenguaje matemático de forma adecuada; realizar una síntesis e institucionalización de los conocimientos matemáticos usados, etc. En contraposición, cuando no hay una planificación y gestión que provoque la construcción autorregulada

y progresiva de nuevo conocimiento matemático, no sólo se puede dar el efecto Jourdain en los adultos, sino que ocurre algo todavía más preocupante en los niños, y es que los resultados de aprendizaje tienden a ser poco satisfactorios. En Alsina y López (en prensa) por ejemplo, a partir de una muestra formada por 149 niños de 3º de Educación Infantil que han aprendido matemáticas durante tres cursos a partir de un método de enseñanza basado en el enfoque conceptual (Baroody y Coslick, 1998), que se caracteriza a grandes rasgos por el aprendizaje de procedimientos a través de materiales manipulativos, se ha obtenido un bajo rendimiento matemático a pesar de que, como indican Alsina y Planas (2008, p. 50), "la manipulación de materiales es en ella misma una manera de aprender que ha de hacer más eficaz el proceso de aprendizaje sin hacerlo necesariamente más rápido". En este estudio los resultados se atribuyen al hecho de que no se han proporcionado las ayudas adecuadas durante las actividades de manipulación ni se ha realizado una síntesis de los conocimientos utilizados, y se concluye que los materiales (como el resto de recursos) no son ninguna garantía de éxito por sí mismos, sino que deben ir acompañados de una planificación y gestión adecuadas que promuevan el aprendizaje.

Y en tercer lugar es preciso remarcar, tal como ya se ha indicado, que en la planificación y en la gestión de la experiencia descrita en la segunda parte de este artículo se han considerado las cuatro fases descritas por Alsina (2011b, 2012b) para trabajar a partir de propuestas globalizadas. Desde este planteamiento, en primer lugar se ha realizado una matematización del contexto que ha permitido a la maestra establecer los contenidos matemáticos que se pueden trabajar a partir de la "construcción de montañas" y planificar a través de qué procesos matemáticos trabajarlos, dejando lógicamente margen para la espontaneidad que conlleva la acción libre de los niños; en segundo lugar se ha establecido un diálogo con los niños para identificar sus conocimientos previos en relación a los distintos tipos de montañas, sus formas, etc., y se han decidido los materiales que pueden ser útiles para "construir montañas"; en tercer lugar, durante el trabajo en contexto los niños han llevado a cabo diversas acciones -rigurosamente observadas, documentadas e interpretadas- en las que han usado distintos tipos de conocimientos matemáticos; y finalmente se ha realizado una puesta en común a partir de la documentación realizada para que los niños comuniquen los conocimientos que han descubierto y aprendido. Esta puesta en común ha permitido hacer una síntesis e institucionalización de los conocimientos utilizados durante la "construcción de montañas" con el objeto de que los niños sean capaces de reconocerlos como contenidos matemáticos que han aprendido en la escuela.

Todo ello ha contribuido, en último término, a favorecer que progresivamente los niños puedan ir desarrollando su nivel de alfabetización y de competencia matemática, que es una de las finalidades de la educación matemática en todas las edades.

Bibliografía

Alsina, A. (2006). *¿Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años?* Barcelona: Octaedro-Eumo.

Alsina, A. (2011a). *Aprendre a usar les matemàtiques. Els processos matemàtics: propostes didàctiques per a l'Educació Infantil.* Vic: Eumo Editorial.

Alsina, A. (2011b). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años.* Barcelona: ICE-Horsori.

Alsina, A. (2012a). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1*(1), 1-14.

Alsina, A. (2012b). Hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades. *Números, 80,* 7-24.

Alsina, A. (2013). La estadística y la probabilidad en Educación Infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Revista de Didácticas Específicas, 7,* 4-22.

Alsina, A. y Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible.* Madrid: Narcea S.A. de Ediciones.

Alsina, A. y López, M. (en prensa). La influencia del método de enseñanza en la adquisición de conocimientos matemáticos en Educación Infantil. En *Investigación en educación matemática: comunicaciones de los grupos de investigación del XVII Simposio de la SEIEM*. Bilbao: SEIEM.

Anderson, A. (1997). Families and mathematics: A study of parent-child interactions. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(4), 484-511.

Baroody, A.J. (1987). *Children's Mathematical Thinking. A developmental framework for preschool, primary, and special education teachers*. Nueva York: Teachers College Press.

Baroody, A.J. y Coslick, R.T. (1998). *Fostering Children's Mathematical Power: An Investigative Approach to K-8 Mathematics Instruction*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística.* Granada: Universidad de Granada.

Benavides, M. y Núnez, R. (2007). Matemática y psicomotricidad: la noción de espacio. *Revista Iberoamericana de Psicomotricidad y Técnicas Corporales, 25, 7*(1), 235-244.

BOE (2006). Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

BOE (2007). Orden ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil.

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra y I. Saiz (Eds.), *Didáctica de las Matemáticas, aportes y reflexiones* (pp. 65-94). Buenos Aires: Paidós Educador.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Carpenter, T.P. y Levi, L. (1999). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades.* Madison: University of Wisconsin-Madison.

de Castro, C., Molina, E., Gutiérrez, M.L., Martínez, S. y Escorial, B. (2012). Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. *Números,* 80, 53-70

de Guzmán, M. (2001). Tendencias actuales de la educación matemática. *Sigma,* 19, 5-25.

Edo, M. (2008). Matemáticas y arte en educación infantil. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 47,* 37-53.

Fernández, T., Cajaraville, J.A. y Godino, J.D. (2008). Configuraciones epistémicas y cognitivas en tareas de visualización y razonamiento espacial. En M. Camacho, P. Flores y M.P. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática: comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la SEIEM* (pp. 189-198). La Laguna: SEIEM.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: Kluwer.

Ginsburg, H. P., Klein, A. y Starkey, P. (1998). The development of children's mathematical thinking: Connecting research and practice. En I.E. Siegel y A. Renninger (Eds.), *Handbook of child psychology: Child psychology in practice* (Vol. 4, pp. 401-476). Nueva York: John Wiley y Sons.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Godino, J.D. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico para maestros.* Granada: Universidad de Granada.

Hill, H.C., Ball, D.L. y Schilling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39,* 372-400.

Hugues, M. (1986). *Children and number: Difficulties in learning mathematics.* Oxford: Blackwell Publishing.

Malaguzzi, M. (2001). *La educación infantil en Reggio Emilia.* Barcelona: Rosa Sensat- Octaedro.

Mercer, N. (2001). *Palabras y mentes.* Barcelona: Paidós.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics (Trad. Castellana, *Principios y estándares para la educación matemática.* Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003).

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project*. Roskilde: Roskilde University.

OCDE (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003.* Paris: OCDE.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant.* París: Presses Universitaires de France.

Planas, N. (2005). El papel del discurso en la construcción del Discurso de la práctica matemática. *Cultura y Educación, 17*(1), 19-34.

Planas, N. (2010). Resolució de problemes. En N. Planas (Ed.), *Pensar i comunicar matemàtiques* (pp. 55-62). Barcelona: Editorial Rosa Sensat.

Polya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas, 2002.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* Granada: Comares.

Recio, A.M. (1999). Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática. Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Rinaldi, C. (2001) The pedagogy of listening: The listening perspective from Reggio Emilia. *Children in Europe*, *1,* 1-4.

Saá, M.D. (2002). *Las matemáticas de los cuentos y las canciones.* Madrid: Editorial Eos.

Schoenfeld, A.H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *The Journal of Mathematical Behaviour, 13*(1), 55-80.

Starkey, P. y Cooper, R.G. (1980). Perception of numbers by human infants. *Science, 210,* 1033-1035.

Sullivan, P. y Lilburn, P. (2002). *Good questions for Math Teaching.* Australia: Oxford University Press.

Vila, A. y Callejo, M. L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar: el papel de las creencias en la resolución de problemas.* Madrid: Narcea, S.A. de Ediciones.

Angel Alsina es profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Girona (España). Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades y en la formación del profesorado de matemáticas. Ha publicado numerosos artículos científicos y libros sobre cuestiones de educación matemática, y ha llevado a cabo múltiples actividades de formación permanente del profesorado de matemáticas en España y en América Latina.
Email: angel.alsina@udg.edu

View publication stats